

Hyperbolicité dans l'outre espace

Vincent Guirardel

May 25, 2016

Contents

1	L'outre espace et les chemins de pliage	2
1.1	obectifs des 3 exposés	2
1.2	l'outre-espace	2
1.2.1	Le groupe libre et $\text{Out}(F_N)$	2
1.2.2	L'outre espace (Definitions)	2
1.3	Faits importants	6
1.4	Le complexe des scindements libres \mathcal{S}	6
1.5	La metrique asym	6
1.6	Chemins de pliages et geodesiques.	7
1.7	Attention	8
1.8	Train tracks (reseau ferroviaires)	8
2	expose 2: le complexe des facteurs et des scindements libres et leur hyperbolicite	10
2.1	But de l'expose:	10
2.2	historique	10
2.3	les complexes hyperboliques	10
2.3.1	Le complexe des scindements libres (rappel)	10
2.3.2	le complexe des facteurs libres et la projection	11
2.3.3	l'argument de Kapovich Rafi [Thm 2.5]	11
2.4	Preuve de l'hyperbolicité de \mathcal{S}	12
2.4.1	La condition de MasurMinsky	12
2.4.2	les chemins de pliages et leur image dans \mathcal{F}	12
2.4.3	Def de la projection	13
2.4.4	Preuve de la contraction	13
3	expose 3: le bord du graphe des facteurs libres et l'alternative de Handel-Mosher	19
3.1	Arbres réels	19
3.2	Arbres arationnels et bord de \mathcal{F}	19
3.3	Les completements irreductibles sont loxodromiques	20
3.4	L'alternative de Handel-Mosher, preuve de C. Horbez	20
4	WPD	22

1 L'outre espace et les chemins de pliage

1.1 obectifs des 3 exposés

Le but de ces 3 exposés est d'expliquer les objets et méthodes nouvellement introduites dans l'étude du groupe $\text{Out}(F_n)$, avec 3 points de focus:

1. l'outre-espace et sa metrique asymetrique (analogue de l'espace de Teichmuller)
 2. les complexes hyperboliques, analogues du complexe des courbes. On en verra 2 en particulier: \mathcal{F} et \mathcal{S} .
 3. l'utilisation du bord a l'infini de ces espaces pour demontrer des choses sur le groupe $\text{Out}(F_n)$: preuve d'Horbez de l'alternative de Handel-Mosher, existence d'elements WPD.
1. 1er expose: introduire l'outre-espace, l'action de $\text{Out}(F_n)$, la metrique asymetrique, et les chemins de pliages.
 2. 2e exposé: introduire les complexe des facteurs libres, des scindements libres, et leur hyperbolicité
 3. 3e exposé: applications, via la description du bord

1.2 l'outre-espace

1.2.1 Le groupe libre et $\text{Out}(F_N)$

On note \mathbb{F}_N le groupe libre sur N generateurs.

Son groupe d'automormphismes $\text{Aut}(\mathbb{F}_N)$ contient les interieurs $\text{Inn}(\mathbb{F}_N)$ et $\text{Out}(F_n)$ est le groupe quotient.

1.2.2 L'outre espace (Definitions)

Analogue de Teich L'outre espace est 1 Analogue de Teichmuller

Rose, Out comme eqvalences d'homotopie Rappel: F_N est isomorphe au groupe fondamental d'une rose a N petales (bouquet de N cercles) par le thm de Van Kampen. Pour fixer un modèle, on fixe une fois pour toute une rose R_N , et on définit $F_N = \pi_1(R_N, *)$.

Toute equivalence d'homotopie $h : F_N \rightarrow F_N$ induit un isomorphisme de $\pi_1(R_N, *)$ vers $\pi_1(R_N, h(*))$, et donc un automorphisme de F_N des qu'on s'est donné un chemin de $h(*)$ a $*$. Ce qui definit un automorphisme exterior de F_N .

Fait: reciproquement, pout tout automorphisme exterior $\alpha \in \text{Out}(F_N)$ il existe une equivalence d'homotopie $h_\alpha : R_N \rightarrow R_N$ qui induit α .

Def 1: graphes metriques L'outre espace a plusieurs définitions équivalentes: un espace de graphes métriques, un espace d'actions sur des arbres, ou un ensemble de spheres dans $\#_N S^1 \times S^2$.

Definition 1.1. *Un graphe métrique marqué $[\Gamma, F, l]$: est la donnée d'un graphe fini Γ , sans sommet de valence 1 ni 2, de longueurs l , et d'une equivalence d'homotopie $F : R_N \rightarrow \Gamma$ (marquage), modulo isometrie qui fait commuter le diag a homotopie pres.*

Pourquoi pas de sommets de valence 1. l'isometrie ne demande pas de respecter la structure simpliciale, donc on pourrait autoriser les sommets de valence 2, ca changerait pas la def.

On note \mathcal{O} cet ensemble (outre-espace non projectifié). L'outre-espace PO est sa projectivisation: identification de 2 homothétiques, isomorphe \mathcal{O}_1 dans lequel on ne garde que les graphes de volume 1.

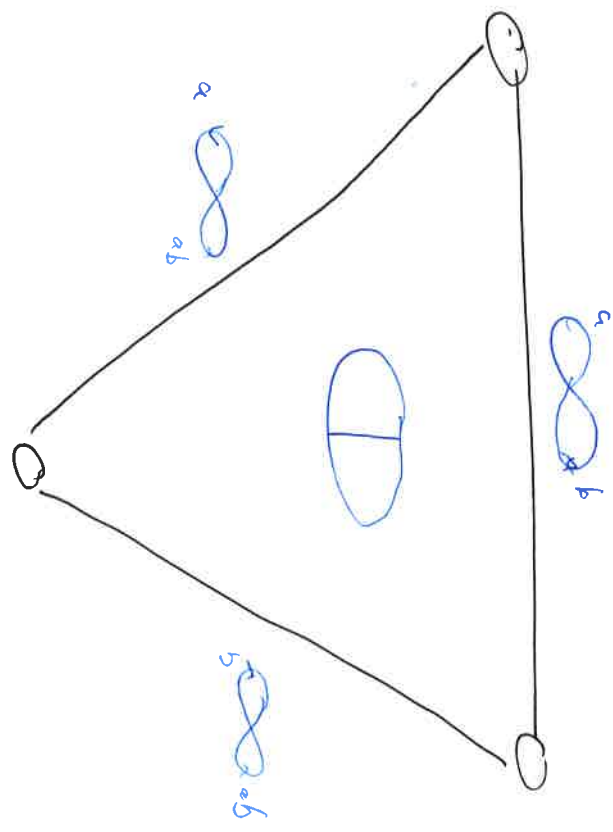
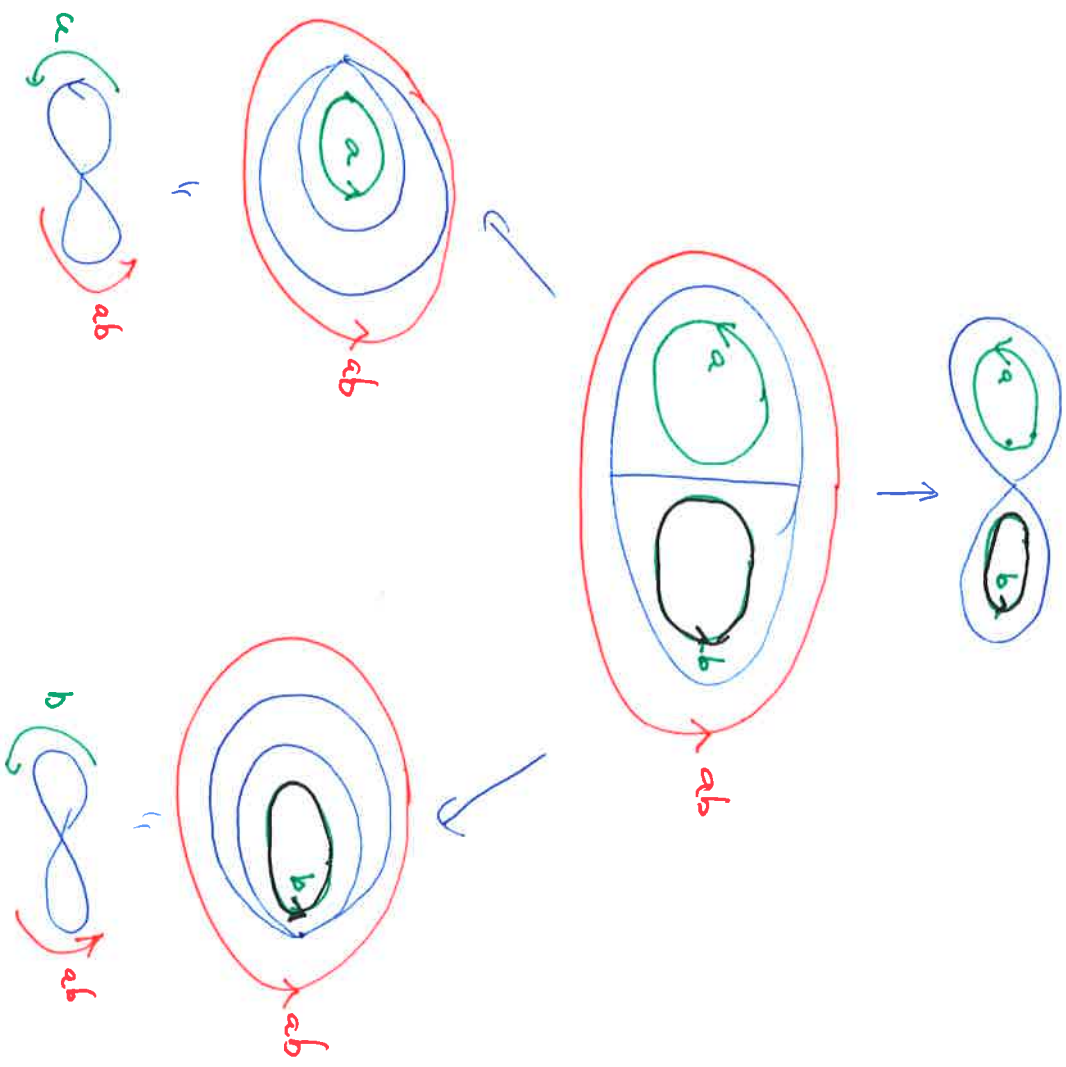
Action Action de $\text{Out}(F_n)$ à droite: $[\Gamma, F, l].\alpha = [\Gamma, F \circ h_\alpha, l]$ avec h_α unique (à homotopie près) eqv d'homotopie de R qui induit α .

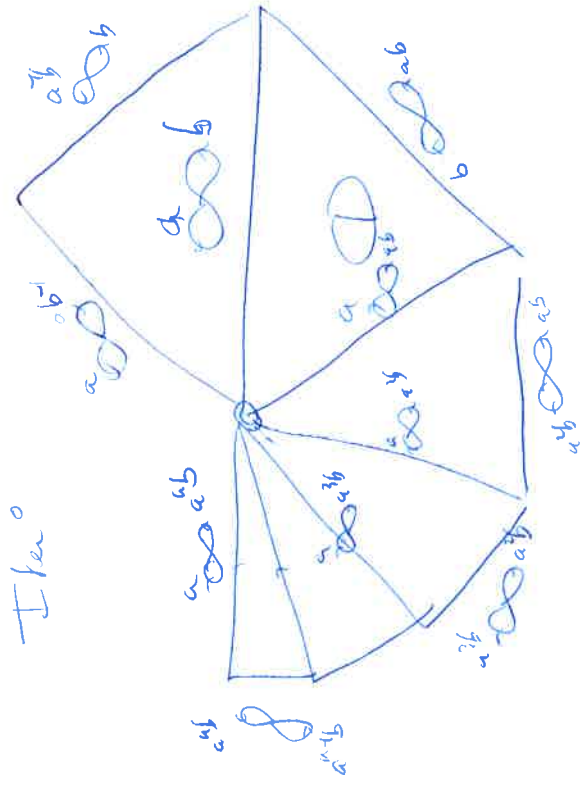
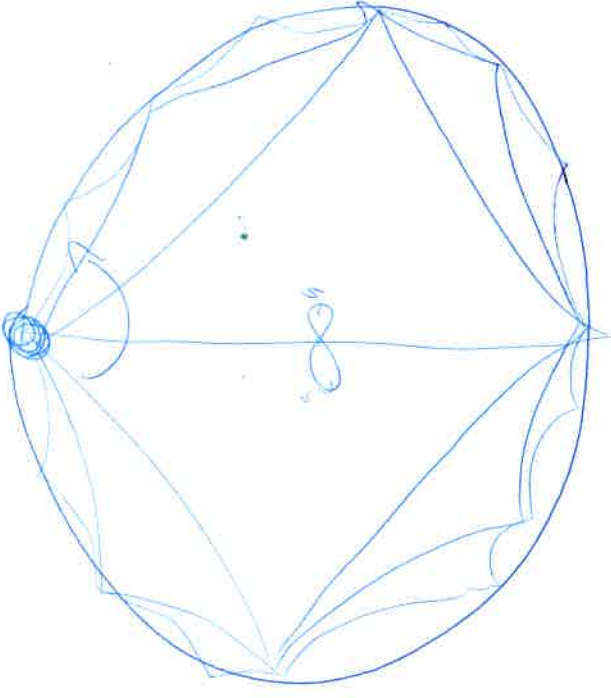
Version plus concrète pour les roses Version + concrète pour 1 rose: eqv homotopie permet d'identifier $\pi_1(\Gamma, F(*))$ avec $\mathbb{F}_N = \pi_1(R_N, *)$. Le choix d'un chemin entre $f(*)$ et le sommet de la rose Γ permet d'identifier les pétales de la rose avec une base de F_N . Mais le choix du chemin change la base en une base conjuguée. Donc: lors que Γ est une rose, on peut penser au marquage comme l'identification des arêtes avec une base de F_N , définie à conjugaison près.

Pour 1 graphe plus général: on peut choisir un sous-arbre maximal, et identifier les arêtes orientées du complémentaire avec une base.

Explication/Dessin

- dessin du graphe theta
- note: pas de point base. Mais chq classe de conj se représente de manière unique par une courbe immergée.
- on peut faire varier les arêtes. Si on garde le volume 1 ou qu'on projectivise on obtient un simplexe (un cône sinon)
- lorsque certaines arêtes tendent vers 0, certaines arêtes sont écrasées, et on identifie avec le graphe ayant moins d'arête.





Topologie=topologie faible Topologie faible (sans insister): C'est une union de simplexes, mais il manque des points qui correspondent a des actions pas libres, et on met la topologie faible correspondante. Il y a d'autres topologies (longeurs de translation/Gromov equivariante qu'on verra plus tard) qui donnent la meme chose ici.

Def 2 arbres

Definition 1.2 (Def 2.). \mathcal{O} est l'ensemble des action de F_N libres sur des arbres métriques simpliciaux, + action minimale: pas de sous-arbre invariant, modulo isométrie equivariante.

Lien entre les 2: $\pi_1(\Gamma) \curvearrowright \tilde{\Gamma}$, et l'identification donne une action de F_N . [il faut choisir un point base, et le changement de point base change l'action, mais il existe une isometrie equivariant entre les 2.]

Simplexes= faire varier les longueurs d'aretes de maniere equivariante.

$P\mathcal{O}, \mathcal{O}_1$.

Action de $\text{Out}(F_N)$ par precomposition de l'action.

Spheres

Definition 1.3 (Def 3). \mathcal{O} systemes de spheres dans $\#_n S_1 \times S^2$, (metriques/ poids sur les spheres) dont le complementaire a toutes ses CC simplement connexes ...

1.3 Faits importants

- \mathcal{O} (et \mathcal{O}_1) est contractile [Culler-Vogtman]
- \mathcal{O} (et \mathcal{O}_1) localement compact, nombre fini d'orbites de simplexes (cones) avec faces manquantes
- On peut definir la partie epaisse $\mathcal{O}_{1,\varepsilon} \subset \mathcal{O}_1$: c'est cocompact (et reste contractile pour ε petit).

1.4 Le complexe des scindements libres \mathcal{S}

Si au contraire on rajoute les points oubliés, on obtient un vrai complexe simplicial: $\dot{\mathcal{O}} \supset \mathcal{O}_1$. On va y penser comme 1 objet purement combinatoire, et on prefere travailler avec sa subdivision barycentrique:

Definition 1.4. On appelle \mathcal{S} le 1-squelette de la subdivision barycentrique de $\dot{\mathcal{O}}$: De maniere equivalente, \mathcal{S} est le graphe simplicial dont les sommets sont les actions minimales sans point fixe global sur des arbres simpliciaux a stab d'arete triviaux modulo homeomorphisme equivariant.

Arete entre 2 sommets si on peut passer de l'un a l'autre en ecrasant une orbite d'aretes.

Ce graphe est un analogue du complexe des courbes.

1.5 La metrique asym

La metrique asymetrique.

Definition 1.5. Soient $\Gamma, \Gamma' \in \mathcal{O}_1$ de volume 1. $Lip(\Gamma \rightarrow \Gamma')$ est l'inf des constantes de Lipschitz des equivalences d'homotopies $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ dans la bonne classe.

$$d(\Gamma, \Gamma') = \log Lip(\Gamma, \Gamma')$$

En termes d'arbres, si $S, T \in \mathcal{O}$ sont deux actions de F_N sur des arbres, on regarde les $f : S \rightarrow T$ equivariantes, et l'inf des constantes de Lipschitz.

Observations:

- Clairement sous-multiplicatif.
- Note ≥ 1 car surjective (minimalite) et volume 1.
- c'est asymetrique
- OPM qu'elle induit la topologie (des 2 cotes)
- C'est atteint: il existe f qui realise l'inf (Arzela-Ascoli)

En fait, OPS f lineaire sur les aretes; le sous-ensemble sur lequel f dilate de $\text{lip}(f)$ s'appelle le graphe de tension $Tens(f)$.

On a toujours $\text{lip}(f) \geq \|g\|_{\Gamma'} / \|g\|_{\Gamma}$ pour tout g .

Definition 1.6. On dit que $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$, lineaire sur les aretes est optimale si

- $Lip(f) = Lip(\Gamma, \Gamma')$
- chaque sommet de $Tens(f)$ a au moins 2 portes: pour tout $v \in Tens(f)$, il y a 2 segments non reduits a 1 point $I, I' \subset Tens(f)$ contenant v tq $f(I) \cap f(I') = \{f(v)\}$.

Si $Lip(f) = Lip(S, T)$ et f n'est pas optimale, on peut diminuer $Tens(f)$. On en deduit:

Lemma 1.7. Il existe toujours f optimale.

En particulier, il existe $g \in F_N$ tq $\text{lip}(f) = \|g\|_{\Gamma'} / \|g\|_{\Gamma}$ et ce g traverse au plus 1 fois chaque arete dans chaque sens.

En particulier: calcul de la distance facile.

preuve du 2e point. partir d'une arete dans $Tens(f)$, et suivre jusqu'a ce qu'on revienne sur ses pas dans le meme sens. \square

Raffinement: on peut dire un peu plus et en particulier, montrer qu'il y a une arete traversee une seule fois, et donc que g est primitif.

1.6 Chemins de pliages et geodesiques.

Proposition 1.8. cette metrique est geodesique.

Mais il n'y a pas unicite des geodesiques

Proposition 1.9 (Variation, Skora). Il existe un choix 'canonique' (glouton) de geodesique, qui varie continument avec les extremités.

Corollaire: \mathcal{O}_1 est contractile.

Preuve: construction de geodesiques. Normalisation differente: on ne contraint pas les volumes a etre 1, mais on prend des metriques tq $\text{lip}() = 1$.

Alors, $d(\Gamma, \Gamma') = \log \text{Vol}(\Gamma) / \text{Vol}(\Gamma') = \log \text{Vol}(\Gamma) - \log \text{Vol}(\Gamma')$.

Avec cette normalisation, si $f : S \rightarrow T$ est 1-lipschitz et optimale, et si f factorise en $f = f_1 \circ f_2$ toutes les 2 1-Lipschitz, alors l'arbre intermediaire T' verifie l'egalite triangulaire. En effet $Lip(S \rightarrow T') = Lip(f_1) = 1$ et $Lip(T' \rightarrow T) = Lip(f_2) = 1$ car si on pouvait ameliorer, f serait pas optimale. Du coup, $d(S, T') = \log \text{Vol}(S) - \log \text{Vol}(T')$, $d(T', T) = \log \text{Vol}(T') - \log \text{Vol}(T)$, et on a egalite triangulaire.

Faire la preuve de la prop. Graphe de tension: les aretes ou c'est localement isometrique. Diminuer les longueurs hors du graphe de tension: c'est geodesique.

On se ramene au cas ou f est isometrique sur toutes les aretes. Si f pas isometrique, alors pas injective, il existe 2 aretes pliees. On peut subdiviser les aretes a la source et au but pour que sommets \rightarrow sommets, aretes sur aretes. On fait le pliage continument. Ca donne un germe de chemins. Le nombre d'orbites d'aretes diminue, donc ca s'arrete.

Ceci montre qu'etant donnees Γ, Γ' , il existe Γ'' qui ne differe de Γ que par diminution de metrique, tq il existe $f_2 : \Gamma'' \rightarrow \Gamma'$ optimale avec graphe de tension = tout, et avec 2 portails partout, et tq ya egalite triangulaire. \square

1.7 Attention

Metrique asymetrique. Soit R la rose std, et R_ε celle ou on met une arete a la longueur ε . $Lip R \rightarrow R_\varepsilon = 1$ donc $d(R, R_\varepsilon) = \log \frac{Vol(R)}{Vol(R_\varepsilon)} = \log \frac{N}{N-1+\varepsilon}$, donc la boule sortante centree en R de rayon $\log \frac{N}{N-1}$ n'est pas compacte.

Par contre $Lip R_\varepsilon \rightarrow R = \frac{1}{\varepsilon}$, donc $d(R_\varepsilon, R) = \log \left(\frac{(N-1+\varepsilon)/\varepsilon}{N} \right) \rightarrow \infty$. Les boules entrantes sont compactes.

Theorem 1.10 (Bestvina-AlgomKfir). *si on fixe ε , il existe C_ε tq en restriction a la partie ε -epaisse, $d(x, y)/d(y, x) \leq C_\varepsilon$.*

1.8 Train tracks (reseau ferroviaires)

Le lien avec les train-tracks (absolus): si Γ est un train track pour φ , alors $(\Gamma, \Gamma.\varphi, \Gamma.\varphi^2, \dots)$ est une geodesique (k allant croissant).

Definition 1.11. *On dit que α est completement irreductible (ou iwip) si aucune puissance de α ne preserve une classe de conjugaison de facteur libre.*

C'est l'analogie, des pseudo-Anosov dans $Out(F_n)$

Rappel: un facteur libre A de F_N est un sous-groupe tq on peut ecrire $F_N = A * B$. De maniere equivalente, A est le stabilisateur d'un point dans une action de F_N sur un arbre simplicial a stab d'aretes triviaux.

Rq: le fait d'etre iwip peut se voir a l'abelianise: si l'action de φ sur l'abelianise n'a pas de facteur direct invariant (periodique), alors on est iwip. Exemple: prendre une matrice positive, genre tribonacci.

Theorem 1.12 (BH). *Tout α irreductible admet un representant train track au sens suivant*

Definition 1.13. *Soit $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ induisant α au π_1 , qui dilate toutes les aretes d'un facteur $\lambda > 1$.*

On dit que f est un train-track si pour toute arete e et tout k , $f^k|_e$ est une immersion, et si tout sommet v est dans un tournant legal: il existe un petit intervalle I contenant v tq $f^k|_I$ est une immersion pour tout k .

Alors si g est une courbe legale $\|\alpha^k(g)\| = \lambda^k \|g\|$, donc f^k est optimale pour tout k . Donc si γ est une geodesique joignant Γ a $\Gamma.\alpha$, la reunion des $\gamma.\alpha^k$ est une geodesique dans l'outre-espace invariante par α .

Note sur l'asymetrie de la metrique: l'amplitude de la translation de α est $\log \lambda$ ou λ est le taux de croissance des classes de conjugaison par les puissances positives de α . Mais on sait que ce taux est parfois different pour α^{-1} . Donc dans l'autre sens, α^{-1} translate donc avec une amplitude differente. Autrement dit l'axe pour α n'est pas une geodesique dans les 2 sens.

Theorem 1.14 (Algom Kfir, 2010). *Soit α un automorphisme irréductible, et A_α un axe comme au-dessus. Alors il est contractant:*
toute boule sortante qui n'intersecte pas l'axe a une projection (pour la distance sortante $d(x, \cdot)$) de diamètre bornée

2 expose 2: le complexe des facteurs et des scindements libres et leur hyperbolicite

2.1 But de l'expose:

Il y a plein de graphes qu'on peut construire, qui sont en un certain sens analogues du complexe des courbes. Ici, on va s'interesser a \mathcal{S} graphe des scindements libres qu'on a deja vu, et \mathcal{F} .

Preuve de \mathcal{S} hyp et geodesiques donnees par images des chemins implique FF hyp.

Idee de preuve

2.2 historique

Masur Minsky 1999: le complexe des courbes est hyperbolique.

Recherche d'un analogue.

2010: Algom Kfir contraction.

Bestvina-Feighn: construction a partir de la dynamq d'un nb fini d'iwips

BF (07/2011 – 2014): FF est hyperbolique [adv in math]

HM (11/2011 – 2013): \mathcal{S} est hyperbolique [geom et topo]

Kapovich-Rafi (06/2012– 2014): \mathcal{S} hyp $\Rightarrow FF$ hyperbolique

HilionHorbez (10/2012 –): preuve via le complexe des spheres.

BF (11/2012 –) simplification de la preuve de l'hyperbolicite

Mann: scindements cycliques

Horbez: produits libres

2.3 les complexes hyperboliques

Analogues du complexe des courbe. Objets combinatoires: graphes + metrique combinatoire (a valeurs entieres sur les sommets). Pas localement fini.

Hyperboliques.

2.3.1 Le complexe des scindements libres (rappel)

graphe des scindements libres \mathcal{S} : on a vu une 1ere def: $P\hat{\mathcal{O}}$ est l'outre-espace auquel on rajoute les sommets manquants des simplexes, et \mathcal{S} est le 1 squelete du graphe de la subdivision barycentrique de $P\hat{\mathcal{O}}$.

Description directe de \mathcal{S} :

- sommets=actions minimales non triviales sur des arbres a stab d'aretes triviaux (modulo homeo equivariant) /qu'on peut voir comme decomposition en graphe de groupes avec un marquage...
- Arete entre T, T' si il existe $f : T \rightarrow T'$ application d'ecrasement.

Chemin peut etre vue comme suite d'ecrasement/eclatements.

Les 2 types de fleches Note au passage: on a vu 2 types de fleches: les applications isometriques sur les aretes qui servent dans les chemins de pliages, et les applications d'ecrasement. Quitte a changer la metrique, il y a toujours une fleche du 1er type entre 2 arbres, mais pas du tout du 2nd type.

la projection $\pi : \dot{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{S}$ L'inclusion induit une application de l'outre-espace dans $V(\mathcal{S})$: donné par oubli de metrique.

Theorem 2.1 (Handel-Mosher). 1. *Le graphe \mathcal{S} est hyperbolique*

2. *Il existe M tq pour toute geodesique $[x, y] \subset P\mathcal{O}$, $\pi([x, y]_{\mathcal{O}})$ est a distance de Hausdorff $\leq M$ de toute geodesique $[f(x), f(y)]_{\mathcal{S}}$.*

2.3.2 le complexe des facteurs libres et la projection

Definition 2.2. *Le graphe des facteurs libres \mathcal{F} est defini ainsi:*

sommet= classe de conjugaison de facteurs libres $[U]$.

Arete entre $[U]$ et $[V]$ s'il existe $T \in \mathcal{S}$ tq U et V sont des stabilisateurs de points de T .

Il existe des variantes: aretes entre $[U]$ et $[V]$ si il existe g tq $U^g \subset V$ ou vice versa (marche pas en rang 2).

Exo: on obtient des espaces quasi-isometriques si $n \geq 3$.

On a une 'coarse' projection $\pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{F}$, l'image de T est le choix d'un des facteurs libres obtenus comme stab de sommets d'un ecrase de T (ie comme sous-graphe de T/F). [on pourrait les prendre tous, ca fait un truc de diametre borne en fonction du nb d'aretes de T]

Fait 2.3. *Il existe M tq*

- *l'ensemble de tous les choix pour $\pi(T)$ est de diametre $\leq M$ (donc π est quasi-equivariant pour l'action de $\text{Out}(F_n)$)*
- *C'est grossierement lipschitzien: si $d_{\mathcal{S}}(T, T') \leq 1$, $d_{\mathcal{F}}(\pi(T), \pi(T')) \leq M$.*

On note aussi $\pi : P\dot{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{F}$ la composition des projections.

Theorem 2.4 (Bestvina-Feighn). 1. *Le graphe \mathcal{F} est hyperbolique*

2. *Il existe M tq pour toute geodesique $[x, y] \subset P\mathcal{O}$, $\pi([x, y]_{\mathcal{O}})$ est a distance de Hausdorff $\leq M$ de toute geodesique $[\pi(x), \pi(y)]_{\mathcal{F}}$.*

2.3.3 l'argument de Kapovich Rafi [Thm 2.5]

Theorem 2.5 (KR). : *Soit X, Y 2 graphes hyperboliques, $\pi : X \rightarrow Y$ qui envoie sommet surjectivement sur les sommets, et Lipschitzienne.*

Supposons qu'il existe M tq pour tout $x_1, x_2 \in X$ tq $d(\pi(x_1), \pi(x_2)) \leq 1$, et toute geodesique $\gamma \subset X$ de x_1 a x_2 $\text{diam}\pi(\gamma) \leq M$.

Alors Y est hyperbolique, et les images des geodesiques de X sont a distance bornee (uniforme) des geodesiques de Y .

Theorem 2.6 (KR). *L'hyperbolicite de \mathcal{S} implique celle de \mathcal{F} .*

Remark 2.7. On peut montrer que $\pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{F}$ n'est pas une qi: si on prend un chemin de pliages convergeant vers un arbre dual a un feuilletage arationnel T sur une surface a 2 bords, alors son image est borne dans \mathcal{F} (c'est pas arationnel), mais pas dans \mathcal{S} : en effet, on a une application $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{Z}$ lipshitzienne le graphe des scindements cycliques (donne par l'inclusion); dans les 2 cas, arete en cas d'ecrasement (ou compatibilite). Or dans \mathcal{Z} , c'est pas borne car T est Z -averse (pas compatible avec un scindement compatible avec un scindement cyclique) car indecomposable.

Preuve. On veut Mq l'hyp s'applique du critere d'hyperbolicite.

Soient $[A], [B] \in \mathcal{F}$ adjacents, ie $F_N = A * B$ (ou plus generalement, $F_N = A * B * F_r$). Notons S le scindement correspondant. Soit $T_A \in \pi^{-1}([A])$ ie tq A est le stab d'un sous-graphe de T_A . T_B de meme. On veut montrer que l'image de la geodesique entre T_A et T_B est bornee.

En regardant le triangle S, T_A, T_B (fin), il suffit de voir que la geodesique entre T_A et S est d'image bornee. On regarde un arbre T'_A a distance ≤ 2 de T_A tq A est le seul groupe de sommet, et S' un eclaté de S tq A est le seul groupe de sommet (ie remplacer B par une rose). On regarde ensuite T''_A et S'' obtenus en eclatant le sommet fixé par A en une meme rose, coloriee en rose.

Ensuite, on met des aretes de longueur 1 sur S'' , et une metrique sur T''_A de sorte qu'on ait un chemin de pliage T_t guidé par $f : T''_A \rightarrow S''$, isometrique sur le rouge. On colorie en rouge l'image du rouge de T''_A dans T_t . On voit alors que pour tout t , A est le stabilisateur d'un ecrasé de T_t , donc $d(\pi(T_t), A) \leq M$. Comme $\pi_S(T_t)$ est a distance bornee d'une geodesique, et que $\pi_{S \rightarrow \mathcal{F}}$ est Lipschitz, ca conclut. \square

2.4 Preuve de l'hyperbolicité de \mathcal{S} .

2.4.1 La condition de MasurMinsky

Theorem 2.8 (Critere de Masur Minsky). *Soit X un graphe, \mathcal{P} un systeme de chemins quasi transitif: il existe K tel que pour tout x, y , il existe x', y' a distance $\leq K$ de x, y tq \mathcal{P} contient un chemin qui va de x' a y' . On suppose que pour chaque $\gamma : [0, L_\gamma] \rightarrow X$, dans \mathcal{P} il existe une application $p_\gamma : X \rightarrow [0, L_\gamma]$ et 3 constantes $A, B, C > 0$ tq les 3 axiomes suivants sont verifies:*

1. *quasi-Lipschitz: $\forall u, v \in V(X)$ si $d_X(u, v) \leq 1$, $\text{diam}_X \gamma([p_\gamma(u), p_\gamma(v)]) \leq C$*
2. *quasi-retraction: pour tout $t \in [0, L_\gamma]$, $\text{diam}_X \gamma([t, p_\gamma(\gamma(t))]) \leq C$*
3. *contraction forte: $\forall u, v \in V(X)$ si $d_X(u, \gamma) \geq A$ et $d_X(u, v) \leq d_X(u, \gamma)/B$ alors $\text{diam}_X \gamma([p_\gamma(u), p_\gamma(v)]) \leq C$*

Alors X est hyperbolique, et il existe une constante M tq les chemins $\gamma \in \mathcal{P}$ sont a distance de hausdorff $\leq M$ des geodesiques entre leurs extremités.

Attention: vitesse non constante, ca peut ralentir ou acclerer. . . .

On montre l'hyperbolicité en montrant qu'on peut appliquer le critere avec $\mathcal{P} = \pi \circ p$ avec p chemin de pliage marche.

2.4.2 les chemins de pliages et leur image dans \mathcal{F}

Rappel: def chemin de pliage guidé par une appli f [et dont le graphe de tension est tout]
La bonne hyp a mettre sur f est que f optimale: $f : T \rightarrow T'$ isometrique sur les aretes avec $\text{Lip}(T \rightarrow T') = 1$, et tq en chaque sommet, il ya au moins 2 portes ($f(v)$ n'est pas terminal dans l'image de l'etoile de v). On a vu qu'on a des geodesiques qui sont données par un chgt de metrique suivi d'un chemin de pliage guidé par une application optimale. Formalisation:

Definition 2.9. *Un chemin de pliage γ guidé par $f : T \rightarrow T'$ optimale est un chemin $\gamma : t \in [0, L] \mapsto \gamma_t \in \mathcal{O}$ avec $\gamma_0 = T$, $\gamma_L = T'$, avec la donnée de morphismes 1-Lipschitzien $f_{t, t'} : \gamma_t \rightarrow \gamma_{t'}$ tq les diagrammes commutent $\forall t < t' < t''$.*

Note: c'est donc une isometrie, mais aucun prerequis sur la vitesse de pliage. En particulier, si on change γ_t par un reparametrage, ca reste un chemin de pliage.

Definition 2.10. *On defint \mathcal{P} comme les $\pi \circ \gamma$ pour γ chemin de pliage.*

Rappel: pour tout $T, T' \in \mathcal{O}$ (interieur de l'outre-espace), quitte a changer la metrique sur T (et eventuellement ecraser des aretes de T), il existe un chemin de pliage de T vers T' . Si T ou T' n'est pas libre, on peut eclater les sommets a stab non trivial (distance 1 dans \mathcal{S}) pour avoir f .

Ceci montre la quasitransitivité:

Fait 2.11. *Pout tout $x, x' \in \mathcal{S}$, il existe $T, T' \in \dot{\mathcal{O}}$ tq $\pi(T), \pi(T')$ sont a distance ≤ 2 de x, x' et tq il existe un chemin de pliage de T vers T' .*

2.4.3 Def de la projection

Soit γ un chemin de pliage, $p \circ \gamma \in \mathcal{P}$ le chemin correspondant dans \mathcal{S} .

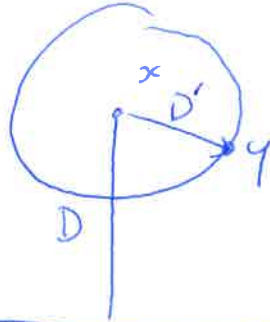
Definition 2.12 (Projection). *On definit $p_\gamma(u)$ comme le plus grand $t_0 \geq 0$ tq il existe 2 chemins de pliages γ', γ'' avec γ'' qui termine en un représentant T_u de u , de sorte que pour $t \leq t_0$, $\gamma'(t)$ soit un ecrasé commun de $\gamma(t)$ et de $\gamma''(t)$.*

2.4.4 Preuve de la contraction

Preuve de la contract^o

Situation de départ : $\gamma: [0, L] \rightarrow \mathcal{O}$ chemin de pliage

l'espace des
soud^{ts}



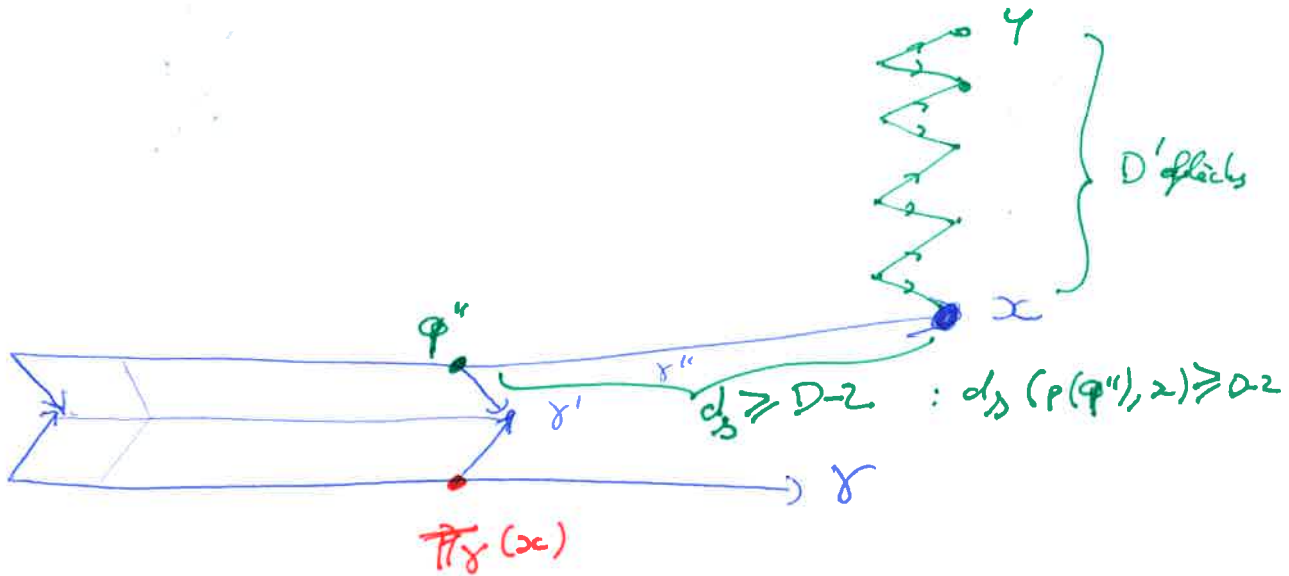
$$D = d_{\mathcal{D}}(x, p_0 \delta)$$

$$D' = d_{\mathcal{D}}(x, y)$$

$$D' \leq D/2$$



Dans \mathcal{O} .



(1) dessin de γ

(2) dessin de γ', γ''
de la def de la
project^o des

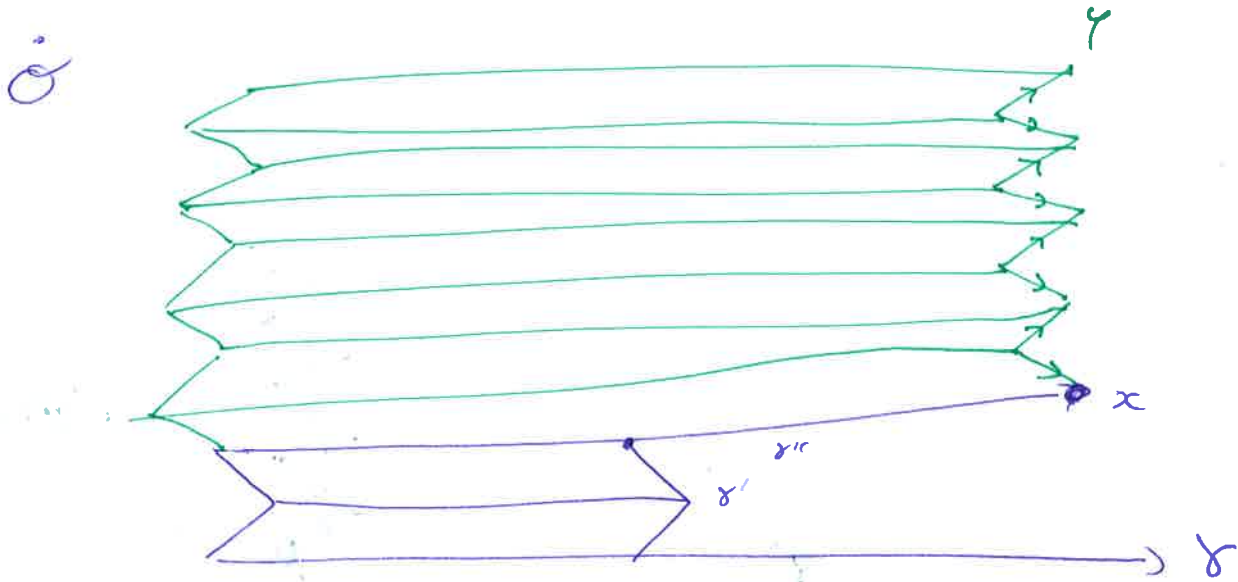
- fleches horizontals = pliage

- fleches diagonals = ecras^t

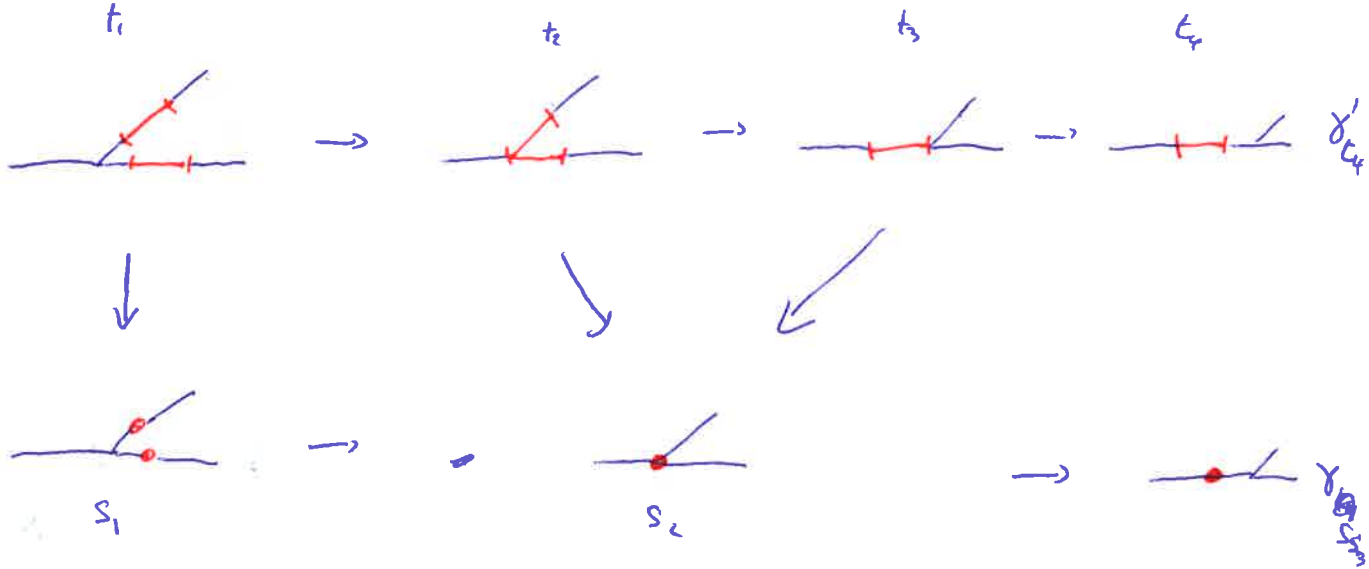
(3) $d_{\mathcal{D}}(x, \delta) \geq D$
de $d_{\mathcal{D}}(x, p) \geq D-2$

(4) $d_{\mathcal{D}}(x, y) = D'$

Étape 1 : remplissage de rectangles



exemple d'arrêt / discontinuité

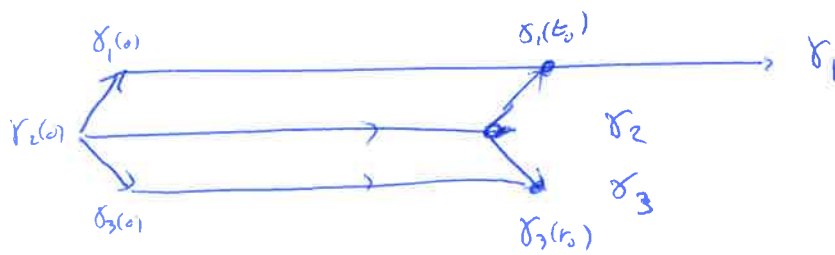


- l'écrasement du chemin du kink s'arrête entre t_2 et t_3

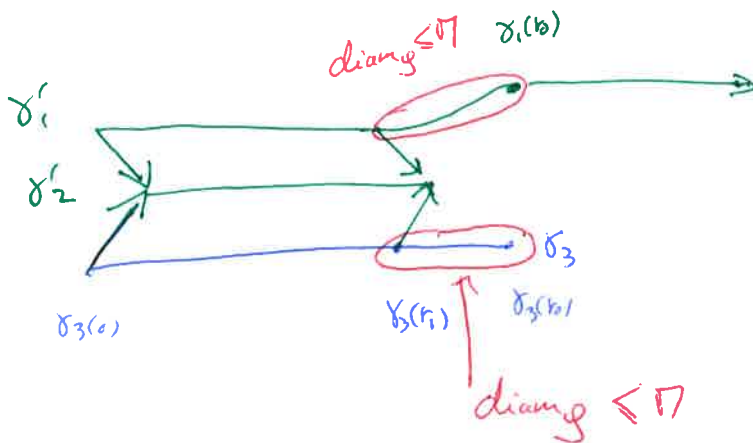
- le produit fibré de $\mathcal{S}_3 \times_{\mathcal{S}_2} \xrightarrow{\delta_{t_4}} \mathcal{S}_3$ est $\gamma_{t_3}^r$ et pas δ_{t_4}

Etape 2 Lemme de troc - $\exists \eta$ tq.

On se donne 3 chemins de plaques. avec γ_2 au dessus



Alors $\exists \delta'_1, \delta'_2$ comme ça :



Situation initiale Dessin dans \mathcal{S} , puis dans $\hat{\mathcal{O}}$.

On a le chemin de pliage γ . Puis γ', γ'' qui définissent la projectin de x , avec γ'' chemin de pliage qui termine en x (muni d'une certaine metrique) et γ' qui est un écrasé commun de γ et γ'' sur un intervalle $[0, t_0]$ avec $t_0 = p_\gamma(t)$. On peut noter $q'' = \gamma''(t_0)$

Soit $D = d_{\mathcal{S}}(x, \gamma)$, et $D' = d_{\mathcal{S}}(x, y)$ de sorte que notre hyp est $D' \leq D/B$. On a donc $d_{\mathcal{S}}(x, q'') \geq D - 2$.

Ensuite, on a un zig-zag entre x et y de longueur D' .

Remplissage des rectangles

Lemma 2.13 (Completion des rectangles). *Si on se donne*

$$\begin{array}{ccc} \gamma_t \rightarrow \gamma_L & & T \\ \text{un écrasement} & \downarrow & \text{ou un éclatement} & \downarrow \\ & T & & \gamma_t \rightarrow \gamma_L \end{array}$$

Alors (quitte a inserer des pauses dans γ_t dans le cas d'un éclatement il existe un chemin de pliage T_t qui complete le diagramme (avec les fleches horizontales= morphismes, et verticales=écrasement).

Point principal lemme de troc

Lemma 2.14. *On se donne 3 chemins de pliages $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : [0, L_i] \rightarrow \hat{\mathcal{O}}$ avec $L_2 = L_3 \leq L_1$ et avec γ_2 qui s'écrase sur les 2 autres.*

Alors il existe $\gamma'_2, \gamma'_1 : [0, L'_i] \rightarrow \hat{\mathcal{O}}$ avec $L'_2 \leq L_2$, et $L'_1 = L_1$ tq

- γ_3 et γ'_1 s'écrasent sur γ'_2 (en restriction a $[0, L'_2]$)
- $\text{diam}_{\mathcal{S}}\gamma_3([L'_2, L_3]) \leq M$ et $\text{diam}_{\mathcal{S}}\gamma'_1([L'_2, L_3]) \leq M$
- et $\gamma'_{1|_{[L'_2, L_1]}} = \gamma_{1|_{[L_2, L_1]}}$

Proof. Si dans $\gamma_2(L_2)$ il y a un segment écrasé des 2 cotes, alors on peut l'écraser tout le long de γ_2 (sans changer γ_1 et γ_3 , et on se ramene au cas ou il n'y en a pas. S'il y a un segment qui survit des 2 cotes, alors on peut regarder sa preimage dans γ_2 , elle survit des 2 cotes tout le long du chemin. En écrasant tout sauf cette preimage, on obtient γ'_2 écrasé commun de γ_1 et γ_3 .

Le cas intéressant est donc celui ou on a un coloriage des aretes de $\gamma_2(L_2)$ en rouge/bleu, les rouges étant écrasées dans γ_1 , et les bleues dans γ_3 . Donc γ_1 est colorié en bleu, et γ_3 en rouge.

On obtient un coloriage dans $\gamma_2(t)$ par preimage pour tout t . Il y a un lemme de controle des distances qui dit que si aucune arete naturelle de $\gamma_2(t)$ ne contient une alternance de couleur RBR, alors la distance entre $\gamma_2(t)$ et $\gamma_2(L_2)$ est bornée. [Lemme a4]: en prenant des points a l'interieur des aretes (de sorte que leur preimage soit pas un sommet), si la distance est grande il y a beaucoup de "mixed region" ie de regions du complementaire de ces points dont le bord contient des points des 2 couleurs. Si leur nombre est assez grand, il y a une arete naturelle qui contient au moins 5 mixed regions. On voit donc au moins des points $R.BBBBBBBB.RRRRRRRR.BBBBBBBBBBBB.RRRRRRRRRR.B$ dans cet ordre (chaque point correspond a une mixed region), donc dans ce segment on voit 4 segments de couleurs alternees, donc un sous segment BRB .

On appelle donc L'_2 ce temps ou on voit BRB dans γ_2 . Notons e_r l'arete rouge coinçee entre 2 aretes bleues dans $\gamma'_2(L'_2)$. On definit $\gamma'_2(t)$ en écrasant tout sauf la preimage de e_r , et on a bien que γ_3 s'écrase sur γ'_2 . On definit $\gamma'_1(t)$ a partir de γ_2 en écrasant tout le rouge sauf la preimage de e_r . Comme on écrase pas le bleu, γ'_1 s'écrase sur γ_1 , et comme on écrase pas e_r , γ'_1 s'écrase sur γ'_2 . En fait, l'hyp BRB dit que $\gamma'_1(L'_2)$ est homeomorphe

a $\gamma_1(L'_2)$ (on a insere un segment rouge entre 2 segments bleus). On change alors la metrique sur γ'_1 pour pouvoir raccorder avec la suite: on met alors la metrique sur $\gamma'_1(L'_2)$ celle donnee par $\gamma_1(L'_2)$, et on definit $\gamma'_1(t) = \gamma_1(t)$ pour $t > L'_2$. Pour $t < L'_2$, on garde les memes applications mais on tire en arriere la metrique modifiee pour que ca devienne une isometrie sur les aretes. Ca nous fait un chemin de pliage a condition de verifier que toutes les fleches sont optimales... \square

Etape 3: simplification Par recurrence: on peut remplacer notre empilement de rectangles par 2 rectangles, sans changer le chemin du bas, de sorte que le chemin du haut soit toujours un chemin de pliage arrivant a x (mais qui n'a rien a voir avec le chemin initial, a part son point d'arrivee) et que la largeur des 2 morceaux non recouverts par les rectangles sont de largeur $\leq M'D'$.

En effet, OPS que les fleches du haut sont des ecrasements vers le bas. On oublie dans ce cas la ligne du haut, on remplace le rectangle en dessous par le lemme de troc, (jusqu'a distance M , ca change la ligne du haut) puis on recomplete la ligne tout en haut par une operation d'eclatement de chemin de pliage. Puis on combine les 2 ecrasements du haut en 1 seul.

L'hyp sur les distances dit que ce rectangle est plus long que celui entre γ et y .

On applique un dernier lemme de troc pour avoir un rectangle de longueur au moins $p_\gamma(y) - M$ entre γ et x .

3 expose 3: le bord du graphe des facteurs libres et l'alternative de Handel-Mosher

Principe de l'exposé: admettre tout ce qu'on voudra sur les arbres réels, donner la description du bord (sans preuve), et démontrer des choses pour $\text{Out}(F_N)$ avec.

3.1 Arbres réels

La compactification de l'outre espace $\bar{\mathcal{O}}$: analogue de la compactification de Thurston par les feuilletages mesurés.

Theorem 3.1. *On peut compactifier $P\mathcal{O}$ par un espace $P\bar{\mathcal{O}}$ d'actions sur des arbres réels $F_N \curvearrowright T$: ce sont les actions minimales dites tres petites:*

- stabilisateurs d'arcs triviaux ou cycliques maximaux
- stabilisateurs de tripodes triviaux.

modulo homothétie equivariante

Def arbre réel: metrique 0-hyperbolique, ou connexe par arc unique, ou union croissante isometrique d'arbres metriques finis.

Exemples:

- Decomposition en produit libre, en produit amalgamé au dessus d'un groupe cyclique maximal (Thie de Bass-Serre)
- courbe sur une surface a bord
- feuilletage mesuré sur surface
- combinaison
- il existe des trucs plus compliqués, mais je veux pas entrer la dedans.

Topologie des fonctions longueurs de translations: une suite d'arbres converge T_n dans $\bar{\mathcal{O}}$ si pour tout g , $\|g\|_{T_n}$ converge, et il existe g tq la limite soit non nulle.

Exemple: limite d'un train track (ca converge) $T_k = \frac{1}{\lambda^k} T \circ \alpha^k$ alors $l_{T_k}(g) = l_{T_l}(g)$. Pour les autres, ca decroit. On a en passant a la limite que $T_\infty \cdot \alpha = \lambda T_\infty$: α a un point fixe dans $P\bar{\mathcal{O}}$.

Plus generalement, si T_k est un chemin de pliage, ca converge pour les memes raisons.

3.2 Arbres arationnels et bord de \mathcal{F}

Definition 3.2 (Reynolds). *T est arationnel si pour tout facteur libre $A < F_N$, l'action de A sur T est libre et discrète.*

Si T n'est pas arationnel, on appelle facteur de reduction tout facteur libre tq l'action de A sur T est soit non libre soit non discrète.

Analogie: un feuilletage arationnel sur une surface fermee, est un feuilletage tq aucune courbe fermee n'est contenue dans une feuille. De maniere equivalente, pour toute sous-surface propre, la restriction du feuilletage a la sous-surface a toutes ses feuilles compactes, et simplement connexes.

Exemple: feuilletage mesure sur des surfaces. Si 1 bord: arationnel Si 2 bords: pas arationnel.

Theorem 3.3 (Bestvina-Reynolds). *Tout arbre arationnel n'a qu'un nombre fini de facteurs de reductions minimaux à conjugaison pres.*

Ils sont a distance uniformément bornée dans \mathcal{F} .

Theorem 3.4 (Bestvina Reynolds, Hamenstadt). *Le bord de Gromov $\partial_\infty \mathcal{F}$ du graphe des facteurs libres s'identifie avec \mathcal{A}/\sim où $\mathcal{A} \subset \partial \mathcal{O}$ est l'ensemble des arbres arationnels, et $T \sim T'$ s'il existe une bijection equivariante preservant l'alignement (ie ils different par un changement metrique).*

De plus, compatibilité si $T_n \in \mathcal{O}$ tend vers 1 arbre arationnel T dans $\bar{\mathcal{O}}$, alors $\pi(T_n) \rightarrow [T]$ dans $\mathcal{F} \cup \partial_\infty \mathcal{F}$.

3.3 Les complements irreductibles sont loxodromiques

Corollary 3.5 (Kapovich-Lustig). *Si α est completement irreductible ssi il est loxodromique dans \mathcal{F} .*

Preuve. Dire que α n'est pas completement irreductible signifie qu'il y a un point periodique. Ya donc 1 sens evident.

Si α completement irreductible, il a un axe A_g donne par un train-track. Il preserve $\pi(A_g)$ qui est une quasi-geodesique reparametree. Il suffit donc de voir que c'est non borné. Donc il suffit de voir que l'arbre réel limite est arationnel. S'il ne l'est pas, il permute l'ensemble de ses facteurs de reduction minimaux. Puisqu'il n'y en a qu'un nombre fini de classes de conjugaison, α n'est pas irreductible. \square

Theorem 3.6. *Ils sont WPD.*

3.4 L'alternative de Handel-Mosher, preuve de C. Horbez

Theorem 3.7 (Handel-Mosher, Horbez). *Soit $G < \text{Out}(F_N)$ un sous-groupe.*

Soit G a un sous-groupe d'indice fini qui preserve un facteur libre, soit G contient un element α completement irreductible. Dans le 2nd cas, soit il est virtuellement cyclique, soit G contient F_2 .

Analogue d'un thm d'Ivanov pour le MCG: contient un pseudo-A ou preserve une multicourbe.

Alternative de Gromov.

Theorem 3.8. *Soit G un groupe agissant par isometries sur un espace hyperbolique \mathcal{F} . Alors*

1. *Soit G a une orbite bornée*
2. *soit G a fixe 1 point ou une paire de point dans $\partial \mathcal{F}$*
3. *soit G contient une paire d'elements loxodromiques engendrant un groupe libre.*

Note: orbite bornee dans un espace pas localement fini, dit pas grand chose !

On sait [Kapovich-Lustig] que le stabilisateur dans $\text{Out}(F_n)$ d'un arbre arationnel est virtuellement cyclique.

Le point clé est donc le suivant:

Proposition 3.9. *Si G a une orbite bornée dans $\partial \mathcal{F}$ il a une orbite finie.*

Preuve. On va utiliser la compacité dans $\bar{\mathcal{O}}$ et sa structure pour remplacer l'absence de locale finitude.

Supposons pour simplifier $G = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ de type fini.

Def: une proba μ sur $\bar{\mathcal{O}}$ est stationnaire si $\frac{1}{n} \sum \alpha_i^* \mu = \mu$.

Autrement dit, si on prend un point au hasard x selon μ , qu'on tire au hasard un des α_i , alors $\alpha_i.x$ se repartit selon la meme loi μ .

Fait std: si un groupe agit sur un espace compact, il existe une proba stationnaire.

Preuve: on definit $M\mu := \frac{1}{n} \sum \alpha_i^* \mu$ l'operateur de moyenne. On part de δ le dirac en un point x de l'interieur l'outre-espace. On prend μ une valeur d'adherence de $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k M^i \delta$. μ marche.

Si $\mu(\mathcal{A}) > 0$, alors la G -orbite de x converge vers un arbre arationnel dans $\bar{\mathcal{O}}$: il existe $\alpha_n \in G$, $x.\alpha_n \rightarrow T$ avec T arationnel. D'apres la compatibilite des topologies, $(\pi(x.\alpha_n)) \rightarrow \infty$, ce qui contredit l'orbite bornee.

Donc $\mu(\mathcal{A}) = 0$. On utilise maintenant l'application $Red : \bar{\mathcal{O}} \setminus \mathcal{A} \rightarrow 2^{\mathcal{F}}$ qui a T associe ses facteurs de reduction. C'est mesurable, a valeurs dans un ensemble denombrable. $Red_*\mu$ est une mesure stationnaire sur $2^{\mathcal{F}}$.

Fait general: si G agit sur un ensemble denombrable D en preservant une mesure stationnaire, alors il y a une orbite finie.

Soit $Max \subset D$ les points dont la masse est maximale, disons a . Montrons qu'il est invariant. Soit $m \in Max$. $a = \mu(m) = \frac{1}{n} \sum \alpha_i * \mu(m) = \frac{1}{n} \sum \mu(\alpha_i(m)) \leq \frac{1}{n} \sum a = a$. puisqu'il y a egalite dans l'inegalite, $\alpha_i(m) = a$, ie Max invariant. \square

4 WPD

Soit h iwip (ie loxodromique dans le complexe des facteurs libres). Soit A_h son axe, et $X \in A_h$. Soit $Y = h^k X \in A_h$ tq $d(X, Y) \gg \text{diam}R(T)$ pour tout arbre T non arationnel. Si h pas WPD, il existe g_n tq $g_n.X$ et $g_n.Y$ sont des suites bornees par 100δ dans \mathcal{F} . Soit U, V des representants metriques de X et Y , de sorte que $f : X \rightarrow Y$ soit 1-lipshitz et optimale. Soient $U_n = \lambda_n g_n U$, avec λ_n choisi pour que U_n converge vers U_∞ de maniere non projective. Soit $V_n = \lambda_n g_n V$, alors puisque $Lip(U_n, V_n) = 1$ et $Lip(V_n, U_n) = Cte$, V_n converge non projectivement vers un V_∞ , et il $f : U_\infty \rightarrow V_\infty$ 1-Lipschitz. Puisque X_n est bornee, U_∞ et V_∞ sont pas arationnels. Si F est un facteur de reduction de U_∞ c'est aussi un facteur de reduction de V_∞ .

D'apres le lemme qui suit, pour n grand, le segment $[X, g_n X]_{\mathcal{F}}$ rencontre le M -voisinage de $R(U_\infty)$, et $[Y, g_n Y]_{\mathcal{F}}$ rencontre le M -voisinage de $R(V_\infty)$, Ceci donne une borne sur $d(X, Y)$.

Lemma 4.1. *Lemme: il existe M tq si U_n converge vers U_∞ , alors pour $n \geq n_0$, $[\pi(U_0), \pi(U_n)]_{\mathcal{F}}$ rencontre le M voisinage de $Red(U_\infty)$.*

Preuve. Preuve: [Cf preuve du lemme 7.3] Notons $V = U_0$, et V_n obtenu en changeant les longueurs sur V de sorte que $Lip(V_n, U_n) = 1$, avec appli optimale f_n dont le graphe de tension est tout. Soit λ_n tq $\lambda_n V_n$ converge vers un certain V_∞ [$\lambda_n = 1/vol(V_n)$ marche]. Notons que λ_n majoré grace a la fonction longueur de U_∞ : pour tout g hyperbolique dans U_∞ et dans V_∞ , on a $\|g\|_{V_n} \geq \|g\|_{U_n} \geq \|g\|_{U_\infty} - \varepsilon$, or $\lambda_n \|g\|_{V_n} \leq \|g\|_{V_\infty} + \varepsilon$.

Notons que si on prend g un element legal qui passe par toutes les aretes de V_n , alors $\|g\|_{V_n} = \|g\|_{U_n}$, donc $\|g\|_{V_n}$ est donc majoré. Si $\lambda_n \rightarrow 0$, g devient elliptique dans V_∞ , contradiction. Donc λ_n est minoré, et OPS $\lambda_n = 1$ pour tout n . Autrement dit, V_n converge vers V_∞ .

En particulier, puisqu'on a des applications 1-Lip $V_n \rightarrow U_n$, on a une appli 1-Lip $V_\infty \rightarrow U_\infty$.

Si V_∞ n'est pas libre, le facteur libre F elliptique dans V_∞ est elliptique dans U_∞ , et U_0 est a distance 1 d'un des facteurs de reduction de U_∞ , auquel cas la conclusion du lemme est triviale.

On suppose donc V_∞ libre. Soit $\gamma_n : [0, L_n]$ un chemin de pliage de V_n a U_n guide par f_n (parametre par longueur d'arc). On veut definir γ le chemin limite de γ_n . On a bien un chemin de pliage bien defini sur $[0, \omega]$ avec $\omega = \liminf L_n$: en effet, a t fixe, on regarde $\gamma_n(t_n)$ a une fonction longueur majoree, et minoree en prenant l'un des candidats qui a une fonction longueur constante. OPS $\omega = \lim L_n$ quitte a prendre une sous-suite et il est clair que $\gamma(\omega) = U_\infty$ dans ce cas puisque les U_n convergent vers U_∞ . Il est aussi clair que $\omega > 0$ puisque V_∞ est dans l'interieur de l'outre-espace.

Soit ω' le premier temps ou $\gamma(t)$ n'est pas dans l'interieur de l'outre espace, et $S = \gamma(\omega')$. On a une appli 1-Lipshchitz de $S \rightarrow U_\infty$. Donc tout facteur de reduction de S reduit U_∞ , donc $R(S) \subset R(U_\infty)$ (et S n'est pas arationnel!).

Le lemme lemme 7.11 dit que l'image dans \mathcal{F} de $\gamma([0, \omega'])$ finit dans le voisinage de $R(S)$ (la 1ere phrase implique ca, la 2eme dit juste que c'est borne). Comme on est dans l'interieur de l'outre espace, γ_n contient des projections a distance 1 de ce voisinage de $R(S)$. Donc la geodesique dans \mathcal{F} entre U_0 et U_n passe pas loin de $R(S)$. \square