Hyperbolicite et logique du premier-ordre

May 27, 2016

Le but du minicours est de d'emontrer que l'hyperbolicite d'un groupe (sans torsion) est un invariant de la theorie du premier-ordre.

1 Logique du premier-ordre - le langage des groupes

Definition 1.1: *Langage des groupes. Formules dans le langage des groupes. satisfaction. Theorie du premier ordre d'un groupe.*

Example 1.2: Exemples de formules du premier-ordre. Non-exemples. Torsion.

Questions naturelles:
1. Caracteriser groupes el'ementairement equivalents a un groupe donne.

Example 1.3: Groupes finis ont la meme theorie ssi sont isomorphes. Groupes abeliens de type fini.

Groupes libres: reponse Sela
2. Quelles proprietes sont des invariants de la theorie du premier ordre?

Example 1.4: Abelianite (une formule). Sans-torsion (infinite de formules)

Etre un groupe libre? Sela - non!
Etre un groupe hyperbolique sans-torsion? Non en general a cause de

Theorem 1.5: *Lowenheim-Skolem*

Mais oui si on se restreint aux groupes de type fini.

Remark 1.6: *Impossible de parler de systeme de generateurs au premier ordre, donc on ne peut pas traduire la definition d'hyperbolicite directement.*

On cherche donc a prouver:

Theorem 1.7: *Soit Γ un groupe hyperbolique sans torsion, et soit G un groupe de type fini tel que $\mathrm{Th}(G) = \mathrm{Th}(\Gamma)$. Alors G est un groupe hyperbolique sans torsion.*

En fait, on donne une caracterisation complete des groupes de type fini ayant la meme theorie qu'un groupe hyp sans torsion donne, puis on utilise le theoreme de combinaison de Bestvina Feighn pour montrer que les groupes obtenus sont eux-memes hyperboliques.

2 Tours hyperboliques

La caracterisation est la suivante

Theorem 2.1: *Soit Γ un groupe hyperbolique sans torsion, et soit G un groupe de type fini tel que $\mathrm{Th}(G) = \mathrm{Th}(\Gamma)$. Alors G est une tour hyperbolique au-dessus d'un sous-groupe quasiconvexe Γ_0 de Γ.*

Definition 2.2: *Graphe d'espaces: $\mathcal{X} = (\Gamma, \{X_v\}_{v\in V(\Gamma)}, \{X_e\}_{e\in E(\Gamma)})$ avec des injections $X_e \hookrightarrow X_v$, $X_e \hookrightarrow X_w$ pour $e = (v, w)$.*

X espace associe = recoller les espaces X_v le long des X_e - on s'interesse surtout au type d'homotopie donc on peut penser aussi a des cylindres $X_e \times [0, 1]$ avec lesquels on joint les espaces.

Example 2.3: X_1, X_2 deux espaces, deux courbes non nulles homotopiques $i_j : \S^1 \to X_j$. On recolle X_1 et X_2 par un cylindre.

Definition 2.4: *Graphe de groupes $\mathcal{G} = (\Gamma, \{G_v\}_{v\in V(\Gamma)}, \{G_e\}_{e\in E(\Gamma)})$ avec des injections $X_e \hookrightarrow X_v$, $X_e \hookrightarrow X_w$ pour $e = (v, w)$.*

Graphe d'espaces correspondant: $\mathcal{X} = (\Gamma, \{X_v\}_{v\in V(\Gamma)}, \{X_e\}_{e\in E(\Gamma)})$ avec X_v tel que $\pi_1(X_v) = G_v$, X_e tel que $\pi_1(X_e) = G_e$ et l'injection $X_e \hookrightarrow X_v$ induit l'injection $G_e \hookrightarrow G_v$.

Groupe fondamental du graphe de groupe = $\pi_1(X)$

Example 2.5: Γ une arete deux sommets. $G_e \simeq \mathbb{Z}$. Graphe d'espaces comme dans l'exemple correspondant.

Par Van Kampen, $\pi_1(\mathcal{G}) = G_1 *_{\mathbb{Z}} G_2$.

Definition 2.6: *Soit $\mathcal{G} = (\Gamma, \{G_v\}_{v\in V(\Gamma)}, \{G_e\}_{e\in E(\Gamma)})$ un graphe de groupe. On dit que v est un sommet de type surface si G_v est un groupe de surface a bord, et si l'application $e \mapsto [i_v(G_e)]$ (ou [] denote la classe de conjugaison) induit une bijection entre l'ensemble des arete adjacentes a v et l'ensemble des classes de conjugaisons de sous-groupes de bord maximaux.*

Definition 2.7: *Soit G' un sous-groupe non cyclique d'un groupe G. On dit que (G, G', r) est un etage de tour hyperbolique si $r : G \to G'$ est une retraction et qu'il existe un graphe de groupe $\mathcal{G} = (\Gamma, \{G_v\}_{v\in V(\Gamma)}, \{G_e\}_{e\in E(\Gamma)})$ satisfaisant*

1. *$V(\Gamma) = V_s(\Gamma) \sqcup V_r(\Gamma)$ ou chaque sommet $v \in V_s(\Gamma)$ est de type surface, avec surface associee de caracteristique au plus -2 ou un tore perce*
2. *Γ est bipartite entre V_s et V_r;*
3. *G' is the fundamental group of (the) free product of the G_v for $v \in V(\Gamma)$;*
4. *for any $v \in V_s(\Gamma)$, the image $r(G_v)$ is non abelian.*

Definition 2.8: *Soit H un sous groupe d'un groupe G. On dit que H est une tour hyperbolique au-dessus de H si il existe une suite $H \leq G_0 \leq \cdots \leq G_m$ telle que*

- *$G_0 = H * S_1 * \ldots * S_q * \mathbb{F}_k$ ou les S_j sont des groupes de surfaces fermes, et $\mathbb{F}$ est un groupe libre;*
- *pour tout i, il existe une retraction $r_i : G_i \to G_{i-1}$ telle que (G_i, G_{i-1}, r_i) est un etage de tour hyperbolique.*

3 Theoreme de combinaison de Bestvina-Feighn

Donne des conditions suffisantes pour qu'un graphe d'espaces hyperboliques soit a son tour hyperbolique.

Anneau de longueur $2m$ dans un graphe d'espaces= application $\Delta : [-m, m] \times \S^1$ such that each piece $[i, i+1] \times \S^1$ is in a different vertex space, $\Delta^{-1}(\{i\} \times \S^1)$ is in an edge space and is a geodesic curve except perhaps in one point (basepoint). It is essential if 1. $\Delta(\{0\} \times \S^1)$the corresponding path in the tree never backtracks, equivalently if $\Delta([i, i+1] \times \{*\})$ is not homotopic rel endpoints into the corresponding edge space.

Theorem 3.1: *Bestvina-Feighn combination. Let $\mathcal{G}$ be a graph of spaces such that*

- *vertex spaces are hyperbolic;*
- *edge spaces embed quasi-isometrically in vertex spaces;*
- *(annuli flare condition) there exists λ and $m > 0$ such that for any ρ, there exists H_ρ such that any essential annulus of length (in the graph) at least $2m$ which is H_ρ-thin and has girth at least H_ρ is λ-hyperbolic.*

Then the fundamental group G of $\mathcal{G}$ is hyperbolic.

Corollary 3.2: *Soit G une tour hyperbolique au-dessus d'un groupe hyperbolique H. Alors G est hyperbolique sans torsion.*

Proof. Ici meme pas besoin de definir ρ-thin et girth et λ-hyperbolique: dans notre tour hyp on a pas d'anneaux de longueur > 2. Donc la 3e condition est verifiee. $\square$

Il nous reste donc a prouver le Theoreme 2.1.

Idee: essayons de plonger G dans Γ. Morphisme de G dans Γ: si $G = \langle x \mid \Sigma(x) \rangle$, un morphisme $G \to \Gamma$ est une solution γ au syteme d'equations Σ.

Equational Noetherianity des groupes hyp sans torsion: sur Γ, Σ est equivalent a un sous-systeme Σ_0 fini.

On peut construire un morphisme: $G \to \Gamma$ en ecrivant

$$G \models \exists x_1 \dots x_r \Sigma_0(x_1, \dots, x_r) = 1$$

dons Γ satisfait le meme enonce - on a trouve une solution dans Γ au systeme Σ!

Morphisme injectif? Parait difficile: il faudrait exprimer la non trivialite de l'image d'un ensemble infini d'elements. Heureusement on a le theoreme suivant qui nous permet de garantir l'injectivite a partir du moment ou on ne tue pas un ensemble fini (d'orbites) d'elements de G.

Remarque: on va essayer de trouver une injection $G \to \Gamma$, et si on y arrive pas, ca va nous donner un etage de tour hyperbolique (G, G', r).

4 Ensembles de factorisation

Theorem 4.1: *Soit G un groupe de type fini, librement indecomposable, sans torsion, et Γ un groupe hyperbolique sans torsion. Il existe un ensemble fini $u_1, \dots, u_r$ d'elements non triviaux de G tel que tout morphisme $h : G \to \Gamma$:*

- *soit h est injectif;*
- *soit il existe $\sigma \in \mathrm{Mod}(G)$ tel que $h \circ \sigma$ tue l'un des elements u_i.*

Groupe modulaire:

Remark 4.2: *Un scindement d'un groupe G au-dessus de $\mathbb{Z}$ donne un automorphisme de G: twist de Dehn.*

Definition 4.3: *Groupe modulaire de G = sous-groupe des automorphismes engendre par tous les twists de Dehn.*

Etant donne un groupe G librement indecomposable, on s'interesse a tous ses scindements au-dessus de Z. Produit amalgame/ extension HNN et pendants geometriques. Scindements compatibles/incompatibles - exemple dans une surface.

Sous certaines hypotheses, il existe une decomposition dans laquelle on peut voir tous les scindements de G au-dessus de Z.

Proposition 4.4: *Existence d'une decomposition JSJ: soit G un groupe de type fini, librement indecomposable, CSA, dont les sous-groupes abeliens sont cycliques. Alors il existe un espace connexe X avec $G = \pi_1(X)$ obtenu en recollant des cylindres et des surfaces a bords (de caracteristique au plus -2 ou bien des tores perces) sur des espaces $X_1, \dots, X_r$ (appeles espaces rigides) le long de leurs bord, qui satisfait: tout scindement de G au-dessus de $\mathbb{Z}$ provient d'une courbe fermee simple sur un cylindre d'arete ou sur une des surfaces.*

Corollary 4.5: *Un automorphisme modulaire σ se restreint a une conjugaison sur le groupe fondamental R de chaque morceau rigide ($\sigma|_R$ est une conjugaison), et envoie chaque groupe fondamental de surface S sur un conjugue de lui-meme ($\sigma(S) = S^\gamma$).*

Remark 4.6: *Si G de type fini, elementairement equivalent a Γ, et librement indecomposable, alors il satisafit les conditions du theoreme (CSA s'exprime par une formule du premier-ordre, G est un groupe Γ-limite donc ss groupes abeliens sont de type fini (dur), il ne contient pas de $\mathbb{Z}^k$ (utiliser l'idee de fromule qui differencie entre $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}^2$)).*

5 Obtention d'une preretraction

Definition 5.1: *Preretraction: soit Λ un graphe de groupes a surfaces (i.e. dont le graphe d'espaces correspondant a un certain nombre de sommets dont les espaces sont des surfaces a bord, telles que les espaces d'aretes adjacents soient exactement les courbes de bord).*

Un morphisme $f : G \to G$ est une preretraction si il se restreint a une conjugaison sur les groupes de sommets non surface, et envoie les groupes de surface sur des images non abeliennes.

Proposition 5.2: *Soit Γ un groupe hyperbolique sans torsion, et soit G un groupe de type fini tel que $\mathrm{Th}(G) = \mathrm{Th}(\Gamma)$. Soit G s'injecte dans Γ, soit il existe une preretraction non injective $\rho : G \to G$.*

Proof. Soit $\langle s_1, \dots, s_m | \Sigma_G(s_1, \dots, s_m)\rangle$ une presentation (supposons la finie pour simplifier) pour G. Etant donne un groupe H, tout morphisme $f : G \to H$

correspond a un m-uplet $(x_1, \dots, x_m)$ d'elements de H qui satisfait l'equation $\Sigma_G(x) = 1$.

On note qu'il existe une formule $\Lambda_G(x, y)$ qui exprime le fait que les morphismes f, f' correspondant aux uplets x, y respectivement coincident a conjugaison pres sur les sommets rigides du JSJ, et que si f envoie un sommet surface sur une image non abelienne alors f' aussi.

Soit maintenant $\{q_i : G \to Q_i | i = 1, \dots, s\}$ l'ensemble de factorisation pour les morphismes $G \to \Gamma$. On choisit pour chaque q_i un element non trivial $u_i(s_1, \dots, s_m)$ du noyau de q_i.

Supposons que G ne s'injecte pas dans Γ: alors pour tout morphisme $f : G \to \Gamma$, il existe un morphisme $f' : G \to \Gamma$ avec $f = f \circ \sigma$ pour $\sigma \in \mathrm{Mod}(G)$ tel que $f'(u_i) = 1$ pour un certain i. Notons que si $f(s) = x$ et $f'(s) = y$ alors $\Lambda_G(x, y)$ est satisfaite. On peut alors affaiblir la proposition ci-dessus pour dire: pour tout morphisme $f : G \to \Gamma, s \mapsto x$, il existe un morphisme $f' : G \to \Gamma, s \mapsto y$ avec $\Lambda_G(x, y)$ tel que $f'(u_i) = 1$ pour un certain i.

Ceci peut alors etre exprime sous la forme d'une formule du premier ordre satisfaite par Γ: Pour tout x satisfaisant $\Sigma_G(x) = 1$, il existe y satisfaisant $\Sigma_G(y) = 1$ tel que $\Lambda_G(x, y)$ est vrai, et pour l'une des valeurs $i = 1, \dots, i = q$, on a $u_i(y) = 1$.

Puisque G et Γ ont la meme theorie du premier ordre, cette formule est egalement satisfaite par G. En l'appliquant a $x = s$, on obtient qu'il existe un morphisme $f' : G \to G$ qui se restreint a une cionjugaison sur chaque groupe de sommet rigide du JSJ, et qui envoie les groupes de surface sur des images non abeliennes, et qui tue l'un des elements u_i (qui etaient non triviaux) - c'est la preretraction que nous cherchions.

□

6 D'une preretraction a une retraction

Proposition 6.1: *Soit G un groupe hyperbolique sans torsion. Soit $\rho : G \to G$ une preretraction. Alors il existe une retraction $r : G \to G'$ telle que (G, G', r) soit un etage de tour hyperbolique.*

Proof. Idee de la preuve sur un exemple: JSJ a une arete, un sommet surface. Supposons pour simplifier pas de courbes pincees par ρ.

Lemme 1: decoupage de la surface selon l'action de son image: il existe un ensemble de courbes fermees simples disjointes sur la surface tel que chaque morceau du complementaire est envoye dans un espace de sommet, et des morceaux voisins sont envoyes sur des espaces de sommet voisins. Lemme 2: si $f : S_1 \to S_2$ morphisme de groupes de surfaces a bords qui ne pince pas de courbes, alors $f(S_1)$ est d'indice fini dans S_2 (Preuve: sous groupe d'indice infini = decomposition en produit libre relativement aux groupes de bord −> pincement) Lemme 3: si $f(S_1)$ sous groupe d'indice fini de S_2 alors la complexite de S est au moins egale a celle de S_2 (rang de $f(S_1)$ au moins egal a celui de S_2 et au plus celui de S_1 - egalite ssi f isomorphisme de groupes, et alors le nombre de composantes de bords est au moins egal puisque des sous-groupes de bord non-conjugues sont envoyes sur des groupes de bord non conjugues).

Si un morceau de Σ est envoye sur Σ, alors il est envoye isomorphiquement et le decoupage etait en fait trivial. Mais dans ce cas ρ est un isomorphisme, ce qui contredit sa non-injectivite.

On voit alors que tous les morceaux sont envoyes par ρ dans le groupe de sommet. On a bien que ρ est en fait une retraction qui nous donne un etage de tour hyperbolique.

Si ρ pince une courbe fermee simple, on le factorise par $\rho = \rho' \circ p$ ou p consiste a pincer un systeme maximal de courbes fermees simples disjointes pincees. Le morphisme ρ' ne pince pas de courbes sur la nouvelle surface Σ', et la complexite de Σ' est inferieure a celle de Σ. On procede comme precedemment, on voit que ρ' envoie tout Σ' dans l'espace de sommet. En tuant le facteur libre supplementaire, on obtient une retraction qui nous donne un etage de tour hyperbolique. On tue les morceaux redondants, ou on les garde pour la non abelianite. □

7 Recurrence

Comment continue-t-on apres l'obtention d'un etage (G, G', r)?

Si G' s'injecte dans Γ, on est content. Sinon, tout morphisme de G' dans Γ se factorise par un ensemble de factorisation, quitte a precomposer par un AM modulaire. On peut dire ca par une formule du premier ordre verifiee sur Γ - en remplacant precomposition par le truc habituel.

Ca nous donne un morphisme non injectif $\rho : G' \to \Gamma$ qui se restreint a une conjugaison sur les sommets rigides et envoie les surface sur des images non abeliennes. il faut voir qu'en composant avec r on peut ensuite trouver une retraction $G \to G''$, etc...

8 Base hyperbolique

On a donc demontre que G est une tour hyperbolique au-dessus d'un sous-groupe G_0 qui se plonge dans Γ.

Pourquoi G_0 est-il hyperbolique?

Remark 8.1: *G_0 est de type fini (c'est un retract de G). Donc si Γ est libre, ou un groupe de surface, ou...en bref si Γ est localement quasiconvexe alors c'est automatique.*

Sinon, l'idee est de renverser l'argument pour montrer que Γ est une tour hyperbolique au-dessus d'un sous-groupe Γ_0 qui se plonge dans G.

Remark 8.2: *Γ_0 est un retract de Γ, il est donc quasiconvexe, donc hyperbolique.*

Probleme: la situation n'est pas symetrique! G n'est a priori pas hyperbolique. Mais on a

Remark 8.3: *G se plonge dans un groupe hyperbolique: il suffit de construire la meme structure de tour que G a sur G_0, mais au-dessus de Γ (puisqu'on sait maintenant que G_0 se plonge dans Γ). C'est une tour hyperbolique au-dessus d'un sous groupe hyperbolique donc par le theoreme de combinaison de Bestvina-Feighn c'est un groupe hyperbolique, et G s'y plonge (on peut en fait l'ecrire comme $G *_{G_0} \Gamma$).*

Ceci est en fait suffisant pour apliquer l'argument qu'on a vu dans l'autre sens. On a donc

- G est une tour sur G_0, et G_0 se plonge dans Γ;
- Γ est une tour sur Γ_0, et Γ_0 se plonge dans G.

En fait, on (Zlil) peut montrer qu'on a meme un plongement de G_0 dans Γ_0, et de Γ_0 dans G_0. La composition des deux nous donne un plongement de Γ_0 dans lui-meme. Si Γ_0 est librement indecomposable alors c'est en fait un isomorphisme (les groupes hyperboliques sans-torsion a un bout sont coHopf), donc G_0 est en fait isomorphe a Γ_0 et en particulier hyperbolique, on a fini.

Pour gerer la possibilite que Γ_0 ne soit pas librement indecomposable, il faut modifier un peu la formule du premier ordre pour s'assurer que les differents facteurs de Γ_0 soit envoyes dans des facteurs libres de G_0 non-conjugues, alors on peut faire le meme argument facteur par facteur.